Математика и Математическое моделирование
Сетевое издание МГТУ им. Н.Э. Баумана
http://mathmjournal.ru

Ссылка на статью:
// Математика и Математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2016. № 02. С. 1–8.

DOI: **10.7463/mathm.0216.0843737**

Представлена в редакцию: 12.03.2016
Исправлена: 28.03.2016

УДК 517.95

К задаче о наклонной производной для уравнения Лаврентьева – Бицадзе в полуплоскости

Алгазин О. Д.[1,*], **Копаев А. В.**[1]

[*] mopi66@yandex.ru

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Уравнение Лаврентьева – Бицадзе решается в полуплоскости. При этом областью эллиптичности также является полуплоскость, а областью гиперболичности – полоса. На одной из прямых, ограничивающих полосу, задана наклонная производная в направлении характеристики, а на другой прямой – границе раздела полосы и полуплоскости - решения сопрягаются краевыми условиями четвертого рода.

Ключевые слова: уравнение Лаврентьева – Бицадзе, наклонная производная, краевые условия четвёртого рода

Введение

Многие проблемы прикладного характера (например, проблемы околозвукового течения сжимаемой среды) сводятся к решению дифференциальных уравнений смешанного типа (уравнению Трикоми, уравнению Чаплыгина и др.). Важной моделью уравнения смешанного типа является уравнение Лаврентьева-Бицадзе [1]. Решению различных краевых задач для этого уравнения посвящено огромное количество статей (см., например, [2], [3], [4], [5], [6]). Поэтому и решение задачи о наклонной производной для уравнения Лаврентьева Бицадзе представляется весьма актуальным.

1. Обозначения

Введём следующие обозначения:

$l_a = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : y = a\}$ – прямая, параллельная оси Ox ;

$D_a^+ = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : y > a\}$ и $D_a^- = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : y < a\}$ - полуплоскости, на которые прямая l_a разбивает плоскость $\mathbb{R}^2$.

В полуплоскости D_{-h}^+ $(h > 0)$ рассмотрим уравнение Лаврентьева – Бицадзе

$$U''_{xx} + sgn(y)U''_{yy} = 0 \qquad (1)$$

В полуплоскости D_0^+ - области эллиптичности уравнения (1) – положим

$$U(x;y) = U^+(x;y)\ ,$$

а в полосе $G = D_0^- \cap D_{-h}^+ = \{((x;y) \in \mathbb{R}^2 : -h < y < 0)\}$ - области гиперболичности уравнения (1) - положим

$$U(x;y) = U^-(x;y)$$

2. Задача 1 о наклонной производной

Пусть $q(x)$ – функция, удовлетворяющая на числовой прямой условию Гёльдера (включая бесконечно удалённую точку) [7, с. 20], при этом пусть $q(\infty) = 0$, а её производная - функция $p(x) = q'(x)$ - также удовлетворяет на числовой прямой условию Гёльдера, включая бесконечно удалённую точку, и $p(x) < \frac{A}{|x|^\alpha}$ $(\alpha > 1, |x| > E)$.

Рассмотрим следующую задачу.

Найти функцию $U^+(x;y)$, гармоническую и ограниченную в полуплоскости D_0^+ и функцию $U^-(x;y)$, ограниченную и удовлетворяющую в полосе G уравнению

$$U_{xx}'' - U_{yy}'' = 0 \qquad (2)$$

по краевому условию

$$\frac{\partial U^-}{\partial x}(x;-h) - \frac{\partial U^-}{\partial y}(x;-h) = p(x)$$

(по заданной на прямой l_{-h} наклонной производной в направлении характеристик уравнения (2), заданных уравнениями $x + y = C$) и по условиям сопряжения функций $U^+(x;y)$ и $U^-(x;y)$ на оси Ox

$$U^-(x;0) = U^+(x;0)\, , \frac{\partial U^-}{\partial y}(x;0) = k\frac{\partial U^+}{\partial y}(x;0) \qquad (3)$$

где $k > 0$ - положительное число.

Решим эту задачу. Представим функцию $U^-(x;y)$ по формуле Даламбера

$$U^-(x;y) = f(x+y) + g(x-y)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ - дважды непрерывно дифференцируемые функции. Преобразуем функцию $U^-(x;y)$:

$$U^-(x;y) = f(x+y) + g(x+y) - g(x+y) + g(x-y) =$$
$$= f(x+y) + g(x+y) + \int_{x+y}^{x-y} g'(\xi)d\xi = \tau(x+y) + \int_{x+y}^{x-y} \mu(\xi)d\xi$$

где введены обозначения

$$\tau(x) = f(x) + g(x), \mu(x) = g'(x)$$

Имеем

$$\frac{\partial U^-}{\partial x}(x;y) = \tau'(x+y) + \mu(x-y) - \mu(x+y)$$
$$\frac{\partial U^-}{\partial y}(x;y) = \tau'(x+y) - \mu(x-y) - \mu(x+y)$$
$$\frac{\partial U^-}{\partial x}(x;y) - \frac{\partial U^-}{\partial y}(x;y) = 2\mu(x-y)$$

$$\frac{\partial U^-}{\partial x}(x;-h) - \frac{\partial U^-}{\partial y}(x;-h) = 2\mu(x+h) = p(x)$$

Отсюда получаем, что $\mu(x+h) = \frac{1}{2}p(x)$, а $\mu(x) = \frac{1}{2}p(x-h)$. Далее,

$$U^-(x;y) = \tau(x+y) + \frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y} p(\xi - h)d\xi$$

$$U^-(x;0) = \tau(x)$$

Но тогда в силу условий сопряжения $U^+(x;0) = \tau(x)$. А так как функция $U^+(x;y)$ является гармонической и ограниченной в полуплоскости D_0^+, то она представима в этой полуплоскости интегралом Пуассона

$$U^+(x;y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau(\xi)d\xi}{(\xi-x)^2 + y^2}$$

Далее,

$$\frac{\partial U^-}{\partial y}(x;y) = \tau'(x+y) - \frac{1}{2}p(x-y-h) - \frac{1}{2}p(x+y-h)$$

$$\frac{\partial U^-}{\partial y}(x;0) = \tau'(x) - p(x-h)$$

$$\frac{\partial U^+}{\partial y}(x;y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau(\xi)[(\xi-x)^2 - y^2]d\xi}{[(\xi-x)^2 + y^2]^2}$$

Применим к последнему интегралу формулу интегрирования «по частям»:

$$\frac{\partial U^+}{\partial y}(x;y) = -\frac{1}{\pi}\tau(\xi)\frac{\xi - x}{(\xi-x)^2 + y^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau'(\xi)(\xi-x)d\xi}{(\xi-x)^2 + y^2}$$

Так как функция $U^+(x;y)$ ограничена в полуплоскости D_0^+, то функция $\tau(x) = U^+(x;0)$ ограничена на числовой прямой, и первое слагаемое в правой части последнего равенства равно 0. Тогда

$$\frac{\partial U^+}{\partial y}(x;y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau'(\xi)(\xi-x)d\xi}{(\xi-x)^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial U^+}{\partial y}(x;0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau'(\xi)d\xi}{\xi - x}$$

Здесь мы должны предположить, что функция $\tau'(x)$ удовлетворяет на числовой прямой условию Гёльдера (включая бесконечно удалённую точку). А так как ещё ограниченная функция $\tau(x) = \int_0^x \tau'(\xi)d\xi + C$, где C - действительное число, то $\tau'(\infty) = 0$. Тогда для нахождения неизвестной функции $\tau'(x)$ получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\tau'(x) - p(x-h) = \frac{k}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau'(\xi)d\xi}{\xi - x}$$

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau'(\xi\}d\xi}{\xi - z} = \begin{cases}\Phi^+(z), Im\, z > 0,\\ \Phi^-(z), Im\, z < 0\end{cases}$$

Применяя формулы Сохоцкого для интеграла типа Коши [7, с.47]

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \tau'(x),$$
$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau'(\xi)d\xi}{\xi - x}$$
получим задачу о скачке на действительной оси:
$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) - p(x-h) = ki(\Phi^+(x) + \Phi^-(x)) \quad (4)$$
Перепишем краевое условие (4) в виде
$$\Phi^+(x)(1-ki) - \Phi^-(x)(1+ki) = p(x-h)$$
Рассмотрим ещё один интеграл типа Коши
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(\xi-h)d\xi}{\xi - z} = \begin{cases}\Psi^+(z), Im\, z > 0;\\ \Psi^-(z), Im\, z < 0.\end{cases}$$
Теперь с учётом формул Сохоцкого получаем
$$\Phi^+(x)\,(1-ki) - \Phi^-(x)(1+ki) = \Psi^+(x) - \Psi^-(x)$$
или
$$\Psi^+(x) - \Phi^+(x)(1-ki) = \Psi^-(x) - \Phi^-(x)(1+ki)$$
А отсюда следует, что
$$\Psi^+(z) - \Phi^+(z)\,(1-ki) = C\ (Im\, z > 0)$$
$$\Psi^-(z) - \Phi^-(z)(1+ki) = C\ (Im\, z < 0)$$
где C - произвольная (комплексная) постоянная. Но тогда
$$\Phi^+(z) = \frac{\Psi^+(z) - C}{(1-ki)}\ (Imz > 0),\ \Phi^-(z) = \frac{\Psi^-(z) - C}{(1+ki)}\ (Imz < 0)$$
Теперь можем найти неизвестную функцию τ'(x) :
$$\tau'(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{\Psi^+(x) - C}{(1-ki)} - \frac{\Psi^-(x) - C}{(1+ki)} =$$
$$= \frac{1}{1-ki}\left(\frac{1}{2}p(x-h) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(\xi-h)d\xi}{\xi - x}\right) -$$
$$- \frac{1}{1+ki}\left(-\frac{1}{2}p(x-h) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(\xi-h)d\xi}{\xi - x}\right) - \frac{2kiC}{1+k^2} =$$
$$= \frac{p(x-h)}{1+k^2} + \frac{k}{(1+k^2)\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(\xi-h)d\xi}{\xi - x} - \frac{2kiC}{1+k^2}$$
Это возможно тогда и только тогда, когда C - число чисто мнимое, т. е. когда $C = iC_1$, где C_1 - действительное число. А учитывая, что $\tau'(\infty) = 0$ и $p(\infty) = 0$, получаем, что $C_1 = 0$, а
$$\tau'(x) = \frac{p(x-h)}{1+k^2} + \frac{k}{(1+k^2)\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(\xi-h)d\xi}{\xi - x}$$
Наконец, мы можем найти неизвестную функцию $\tau(x)$:
$$\tau(x) = \frac{q(x-h)}{1+k^2} - \frac{k}{(1+k^2)\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}p(\xi-h)\ln|\xi - x|\ d\xi + C$$
где C - произвольная (действительная) постоянная. Применим к последнему интегралу формулу интегрирования «по частям»:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi - h)\ln|\xi - x|d\xi = q(\xi - h)\ln|\xi - x|\,\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\xi - h)d\xi}{\xi - x}$$

Так как функция $q(x)$ удовлетворяет в бесконечно удалённой точке условию Гёльдера и так как $q(\infty) = 0$, то первое слагаемое в правой части последнего равенства равно 0, и

$$\tau(x) = \frac{q(x-h)}{1+k^2} + \frac{k}{(1+k^2)\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\xi-h)d\xi}{\xi-x} + \mathrm{C}$$

Рассмотрим пример для

$$\mathrm{p}(x) = \frac{x}{(a^2+x^2)^2} = \left(-\frac{1}{2(a^2+x^2)}\right)'.$$

Имеем:

$$\tau(x) = -\frac{1}{2(1+k^2)(a^2+(x-h)^2)} -$$

$$-\frac{k}{2(1+k^2)\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(a^2+(\xi-h)^2)(\xi-x)} + C =$$

$$= -\frac{1}{2(1+k^2)(a^2+(x-h)^2)} + \frac{k(x-h)}{2a(1+k^2)(a^2+(x-h)^2)} + C =$$

$$= \frac{k(x-h)-a}{2a(1+k^2)(a^2+(x-h)^2)} + \mathrm{C}$$

$$U^+(x;y) = \frac{k(x-h)-y-a}{2a(1+k^2)((x-h)^2+(y+a)^2)} + C$$

$$U^-(x;y) = \frac{2k(x+y-h)+a(k^2-1)}{4a(1+k^2)(a^2+(x+y-h)^2)} - \frac{1}{4(a^2+(x-y-h)^2)} + \mathrm{C}$$

3. Задача 2 о наклонной производной

Аналогично решается следующая задача. Найти функцию $U^+(x;y)$, гармоническую и ограниченную в полуплоскости D_0^+ и функцию $U^-(x;y)$, удовлетворяющую в полосе G уравнению (2) по краевому условию

$$-\frac{\partial U^-}{\partial x}(x;-h) - \frac{\partial U^-}{\partial y}(x;-h) = p(x)$$

(по заданной на прямой l_{-h} наклонной производной в направлении характеристик уравнения (2), заданных уравнениями $x - y = C$) и по условиям (3) сопряжения функций $U^+(x;y)$ и $U^-(x;y)$. Только при решении задачи 2 используется представление

$$U^-(x;y) = \tau(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \mu(\xi)d\xi ,$$

где $\tau(x) = f(x) + g(x)$, а $\mu(x) = f'(x) = -\frac{1}{2}\, p(x+h)$.

В результате получаем

$$\tau(x) = -\frac{q(x+h)}{1+k^2} - \frac{k}{\pi(1+k^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\xi+h)d\xi}{\xi - x} + C$$

$$U^+(x;y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau(\xi)d\xi}{(\xi-x)^2 + y^2}$$

$$U^{-}(x;y) = \tau(x-y) - \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} p(\xi+h)\,d\xi$$

Заключение

Таким образом, в работе решена задача о наклонной производной для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в полуплоскости, при этом область эллиптичности также является полуплоскостью, а область гиперболичности – полосой. Наклонная производная задана на одной из прямых, ограничивающих полосу, в направлении характеристики гиперболического уравнения, а на другой прямой, ограничивающей полосу и разделяющей ее с полуплоскостью эллиптичности, выполняются краевые условия четвертого рода. Показано, что при сделанных предположениях относительно заданных функций задача имеет единственное решение (с точностью до произвольной действительной постоянной).

Список литературы

1. Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа // Тр. МИАН СССР. 1953. Т.41. С. 3-59.
2. Сабитов К.Б., Новикова В.А. Нелокальная задача А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Известия вузов. Математика. 2016. № 6. С. 61-72.
3. Moiseev E.I., Moiseev T.E., Vafodorova G.O. On an Integral Representation of the Neumann-Tricomi Problem for the Lavrent'ev-Bitsadze Equation // Differential Equations. 2015. Vol. 51. No. 8, pp. 1065-1071. DOI: 0.1134/S0012266115080108
4. Солдатов А.П. О задачах типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Дифференциальные уравнения и динамические системы. Сборник статей // Тр. МИАН. 2012. Т. 278. С. 242-249.
5. Сабитов К.Б., Хаджи И.А. Краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с неизвестной правой частью // Известия вузов. Математика. 2011. № 5. С. 44-52.
6. Сербина Л.И. Решение одной начально-краевой задачи теории фильтрации с нелокальными краевыми условиями // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2003. Вып. 19. С.16-21. DOI: 10.14498/vsgtu133
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука. 1977. 640 с.

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal of the Bauman MSTU
http://mathmjournal.ru

Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU, 2016, no. 02, pp. 1–8.

DOI: **10.7463/mathm.0216.0843737**

Received: 12.03.2016
Revised: 28.03.2016

Towards the Oblique Derivative Problem for the Lavrentyev – Bitsadze Equation in the Half-Plane

O.D. Algazin[1,*], **A.V. Kopaev**[1]

[*]mopi66@yandex.ru

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: the Lavrent'ev - Bitsadze equation, oblique derivative, boundary conditions of the fourth kind

The article solves the boundary value problem with an oblique derivative for the Lavrentyev – Bitsadze equation, which is an equation of the mixed elliptic-hyperbolic type. The mixed type equations are used in transonic gas dynamics. A restricted solution to the problem is sought in the half plane, consisting of the upper half plane (where the equation is elliptic) and adjacent band (where the equation is hyperbolic). At the boundary of the domain an oblique derivative towards one of the characteristics is specified. At the boundary of the upper half plane, which is a line of equation type alteration, the matching conditions of the fourth kind are set. In the hyperbolicity band the solution is represented by d'Alembert formula, and in the upper half plane, where the equation is elliptic, the restricted solution is represented by Poisson integral of unknown density. For unknown Poisson integral density a singular integral equation is obtained, which is reduced to the Riemann boundary value problem for holomorphic functions. The solution of this problem is obtained in an explicit form. Thus, the solution to the problem with an oblique derivative for the Lavrentyev – Bitsadze equation was obtained in an explicit form for the case of the half plane accurate to a constant summand. An example of solving the problem to prove the theoretical calculations is provided at the end of the article.

References

1. Bitsadze A.V. On the problem of equations of mixed type. *Trudy MIAN SSSR*, 1953, vol.41, pp. 3-59. (in Russian).
2. Sabitov K.B., Novikova V.A. Dezin's problem for Lavrent'ev–Bitsadze equation. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2016, no. 6, pp. 61-72. (In Russian).
3. Moiseev E.I., Moiseev T.E., Vafodorova G.O. On an Integral Representation of the Neumann-Tricomi Problem for the Lavrent'ev-Bitsadze Equation. *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 8, pp. 1065-1071. DOI: 10.1134/S0012266115080108
4. Soldatov A.P.On Dirichlet-type problems for the Lavrent'ev-Bitsadze equation. *Trudy MIAN = Trudy Matematicheskogo Instituta Steklova*. 2012, vol., 278, pp. 242-249. (In Rus-

sian). (English version of journal: *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2012, vol. 278, no. 1, pp. 233-240. DOI: 10.1134/S0081543812060223).
5. Sabitov K.B., Khadzhi I.A. The boundary-value problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation with unknown right-hand side. *Izvestiya vuzov. Matematika*. 2011, no. 5, pp. 44-52. (In Russian). (English version of journal: *Russian Mathematics*, 2011, vol. 55, no. 5, pp 35-42. DOI: 10.3103/S1066369X11050069).
6. Serbina L.I. Saving one initial boundary value problem of filter theory with non-local boundary conditions. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ser. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2003, vol. 19, pp.16-21. (In Russian). DOI: 10.14498/vsgtu133
7. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* [Boundary problems]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p.(In Russian).